Goldene Verhältnisse: Das Geheimnis der großen Pyramide

Bernd Thaller
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen,
Karl-Franzens-Universität Graz

1 Einleitung

Die Mathematik bezieht ihre Rechtfertigung als wichtiges Schulfach zu einem guten Teil aus dem Nutzen, der aus ihren Anwendungen entspringt. Dadurch entsteht die Verpflichtung, auf inhaltlicher Ebene außermathematische Aspekte in den Mathematikunterricht einfließen zu lassen. Das kann auf jedem Ausbildungsniveau gemacht werden und bietet durchaus die Chance, Interesse und Sympathie für die Mathematik selbst zu fördern. Ein Thema, das faszinierende Anknüpfungspunkte bereitstellt und auf allen Schulstufen den Unterricht bereichern kann, sind Fibonacci Zahlen und der Goldene Schnitt. Hier kann man zeigen, dass Mathematik mehr ist als lästige Rechenübungen und monotoner Aufgabendrill. Wegen seiner zahlreichen Aspekte, der fächerübergreifenden Bedeutung und seiner überraschenden Ergebnisse ist dieses Thema jedenfalls gut geeignet, aufgeschlossene Schülerinnen und Schüler für die Mathematik zu begeistern und ihnen den Spaß am Denken zu vermitteln, den zu erwecken eine der vornehmsten Aufgaben des Mathematikunterrichts sein sollte.

Als ein Thema von großer mathematischer Schönheit, das gleichzeitig mit einfachen mathematischen Mitteln zugänglich ist, hat es viele Menschen fasziniert, die nun den Goldenen Schnitt nahezu überall sehen - in der Musik, in der Architektur, in der Kunst, in menschlichen, tierischen und pflanzlichen Proportionen und in zufällig auftauchenden Zahlenverhältnissen in der Astronomie. In den meisten Fällen ist jedoch eine kritischere Herangehensweise nötig (siehe [1]), wie wir in diesem Artikel an einem Beispiel diskutieren werden.

Weitere Informationen zu diesem Thema und seinem Umfeld findet man in meinem Skriptum [2], einige Kopiervorlagen sind per download verfügbar [3]. Zahlreiche Ideen für den (elementaren) Unterricht und Anregungen für Arbeitsblätter kann man sich, leider nur auf Englisch, in [4] holen. Unter den Büchern in deutscher Sprache ist vor allem das Buch [5] gut lesbar, auf Englisch zum Beispiel [6]. Nachdrücklich für den Schulgebrauch zu empfehlen ist auch Hans Magnus Enzensbergers wunderbares Büchlein „Der Zahlenteufel“ [8], das unser Thema in mehreren Kapiteln kindgerecht aufgreift, aber auch erwachsene Leserinnen und Leser zu unterhalten versteht. Als Einstieg in eine Internet-Recherche könnte die Webseite [9] dienen.

Im folgenden Text sind gelegentlich Übungsaufgaben („Fragen“) eingestreut — als Anregung zur Verwendung im Unterricht und als kleine Erinnerung, dass Mathematik vom Studierenden nur durch aktive Betätigung erworben werden kann.

2 Rechtecksproportionen und Goldener Schnitt

Die bei weitem einfachste „Herleitung“ von Fibonacci Zahlen und Goldenem Schnitt führt über die folgende Methode, Rechtecke aus Quadraten zusammenzusetzen: Wir beginnen mit zwei Quadraten der Seitenlänge 1 (alle Maße beispielsweise in cm). Wenn wir sie nebeneinanderlegen, erhalten wir ein Rechteck. An dessen längere Seite legen wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 2. Wir erhalten ein neues Rechteck und an dessen längere Seite passt nun ein Quadrat der Seitenlänge 3. Wir fahren fort, indem wir immer größere Quadrate an die jeweils längere Seite des schon vorhandenen Rechtecks anfügen.

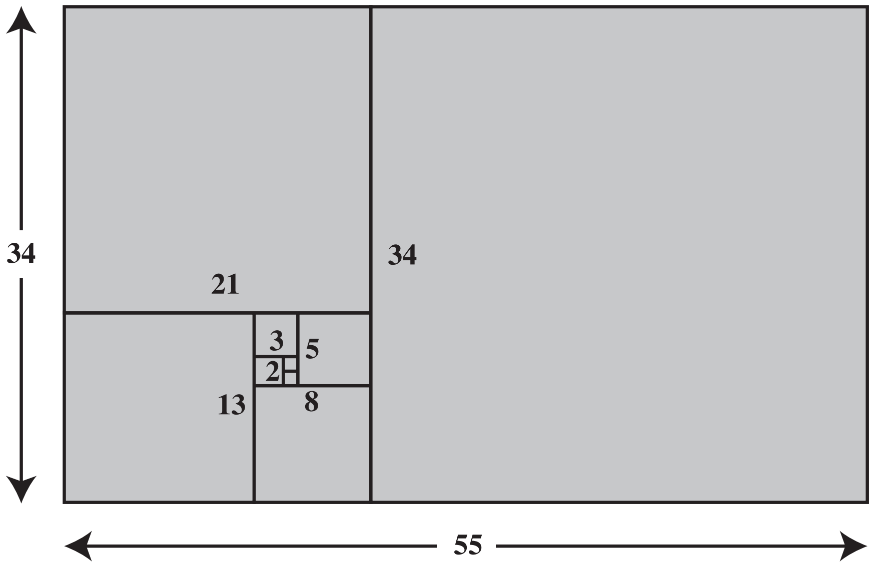

Abbildung 1: Pflasterung eines rechteckigen Bereiches mit Quadraten, deren Seitenlängen die Fibonacci Zahlen sind. Das äußere Rechteck hat das Seitenverhältnis 55 : 34 = 1,617647.

Anhand der Abbildung 1 erkennt man leicht, dass die Seitenlängen der angefügten Quadrate durch die folgende Zahlenfolge dargestellt werden:

$$(1, 1, 2, 3, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...)$$

Man bezeichnet diese Folge als Fibonacci Folge und die Zahlen dieser Folge als Fibonacci Zahlen $F(n)$. Unsere Schülerinnen und Schüler sind vielleicht in der Lage herauszufinden, wie man die nächsten Fibonacci Zahlen rein rechnerisch bestimmen könnte. Was ist also das Bildungsgesetz dieser Folge? Aufgrund des Konstruktionsprinzips ist natürlich klar, dass die Fibonacci Zahlen durch

$$F(1) = F(2) = 1, \quad F(n+1) = F(n) + F(n-1) \quad (\text{für } n > 1)$$

eindeutig charakterisiert werden. Jede Fibonacci Zahl ist also die Summe der beiden vorhergehenden. Hier noch zwei weitere Aufgaben für ein knobelnd-forschendes Herangehen an die Mathematik:

Frage 1 *Betrachte das Rechteck aus der Abbildung 1 und begründe die Formel*

$$F(1)^2 + F(2)^2 + \ldots + F(n)^2 = F(n)F(n+1).$$

Frage 2 *Die Fibonacci Zahlen erfüllen auch folgende Formel*

$$F(1)\,F(2) + F(2)\,F(3) + \ldots + F(n-1)\,F(n) = F(n)^2 \quad \textit{für gerade Zahlen } n.$$

Kannst du eine grafische Darstellung dieser Aussage finden?

Die Abbildung 2 gibt eine mögliche Antwort auf Frage 2.

Historisch betrachtet sind diese Zahlen erstmalig in den vedischen Schriften des alten Indien bereits im ersten Jahrtausend v. Chr. aufgetaucht. In einer literarisch-linguistischen Untersuchung der vedischen Verse löste der Gelehrte Pingala das kombinatorische Problem, wie man die Anzahl

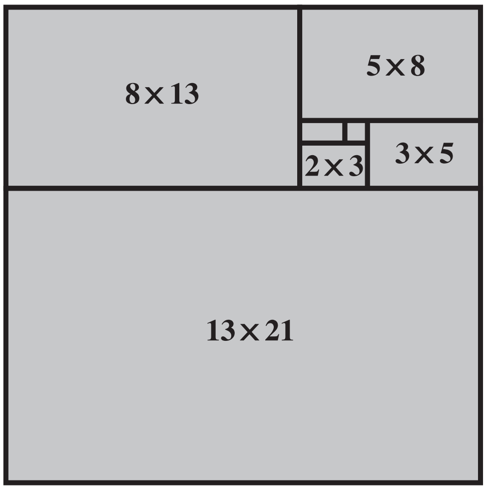

Abbildung 2: Pflasterung eines quadratischen Bereiches mit einer ungeraden Anzahl von Rechtecken, deren Seitenlängen aufeinanderfolgende Fibonacci Zahlen sind.

der Versmaße bestimmt, die sich aus kurzen (einmorigen) und langen (zweimorigen) Silben zusammensetzen und insgesamt eine bestimmte (in Moren gemessene) Zeitdauer haben. (Pingala löste übrigens auch das entsprechende Problem in der silbenzählenden Betrachtungsweise. Diese führt auf die Zahlen des Pascalschen Dreiecks, das in diesem Zusammenhang als Sinnbild für den „Berg Meru“ seinen historisch ersten Auftritt ebenfalls im alten Indien gehabt haben dürfte.)

Ihren Namen haben die Fibonacci Zahlen von Leonardo di Pisa, der von der Nachwelt Fibonacci genannt wurde, und der wohl der wichtigste europäische Mathematiker des Mittelalters war. Im Jahre 1202 stellte er in seinem bedeutenden Buch der Rechenkunst, dem Liber Abaci, das berühmte Kaninchenproblem vor. Dabei wird die Vermehrung von Kaninchenpaaren unter bestimmten Annahmen beschrieben — ein erstes, wenn auch unrealistisches Beispiel der Populationsdynamik mit diskreter Zeit. Die Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten ist in diesem Beispiel durch die Fibonacci Zahl $F(n)$ gegeben.

Diese und ähnliche Probleme, die auf Fibonacci Zahlen führen, sind in meinem Artikel [2] ausführlich beschrieben. Die hier gezeigte rechteckigen Pflasterung hat aber den Vorteil, dass sie viel unmittelbarer einleuchtet und es sofort gestattet, die Aufmerksamkeit auf die Seitenverhältnisse $F(n+1) : F(n)$ zu richten. Die Darstellung von Rechtecksproportionen durch Seitenverhältnisse kann Schülerinnen und Schülern schon früh plausibel gemacht werden, ein Anknüpfungspunkt sind zum Beispiel die Formatangaben bei Fernsehgeräten (16:9, bzw. 4:3 bei älteren Geräten). Auch die DIN-Papierformate eignen sich gut, Proportionen von Rechtecken und Streckenverhältnisse (in diesem Fall $\sqrt{2} : 1$) zu diskutieren.

Die gemäß der Konstruktion in Abb. 1 entstehenden Rechtecke werden zwar mit jedem Schritt größer, aber sie scheinen bald fast gleichbleibende Proportionen zu haben. Zum Beispiel schaut das äußere Rechteck mit den Seitenlängen 55 und 34 mit freiem Auge so aus, als ob es einfach eine Vergrößerung des in der Abbildung sichtbaren kleineren Rechtecks mit den Seitenlängen 21 und 13 wäre.

Prüfen wir das nach: Das Rechteck mit den Seitenlängen 21 und 13 hat das Seitenverhältnis Verhältnis $21/13 \approx 1{,}6154$, das große Rechteck hat das Seitenverhältnis $55/34 \approx 1{,}6176$. Die beiden Rechtecke sind also im mathematisch geometrischen Sinne nicht „ähnlich“, aber zumindest unterscheiden sich ihre Seitenverhältnisse nur geringfügig.

Frage 3 *(a) Kannst du auch ohne Dezimalbruchapproximation (also ohne Taschenrechner) einsehen, dass* 21/13 *kleiner als* 55/34 *ist?*

(b) Betrachte die beiden Rechtecke mit den Seitenverhältnissen 21/13 *und* 55/34*. Berechne die Steigungen der Diagonalen der beiden Rechtecke. Liegt der Eckpunkt des kleinen Rechtecks oberhalb, unterhalb, oder auf der Diagonale des großen Rechtecks?*

(c) Wo muss der Punkt C' liegen, damit die beiden in Abbildung 3 gezeigten Rechtecke ABCD und A'B'C'D' im geometrischen Sinn ähnlich sind?

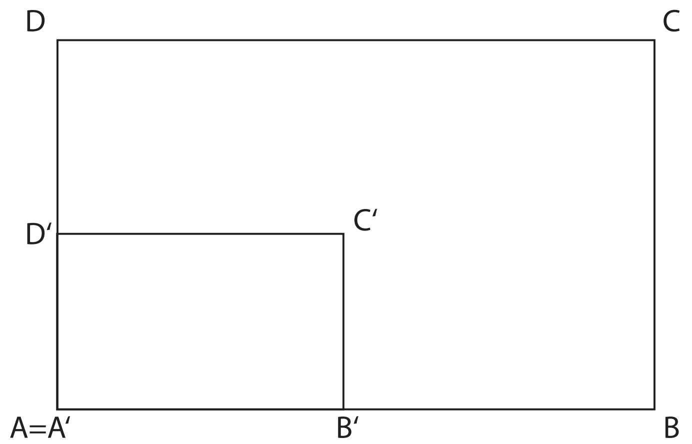

Abbildung 3: Unter welcher Bedingung sind diese beiden Rechtecke ähnlich? (siehe Frage 3c)

Die Seitenverhältnisse (=Proportionen) 21/13 und 55/34 sind also nicht genau gleich, unterscheiden sich aber erst in der dritten Dezimalstelle. Da ist es naheliegend, zu fragen, ob sich vielleicht diese Seitenverhältnisse einem bestimmten Wert immer mehr nähern, je größer die Rechtecke werden. Wir fragen also, wie sich die Verhältnisse aufeinanderfolgender Fibonacci Zahlen $F(n+1)/F(n)$ für große n verhalten.

Wir definieren

$$a_n = \frac{F(n+1)}{F(n)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und erhalten so eine neue Zahlenfolge aus der Fibonacci Folge. Die ersten Glieder der Folge (a_n) sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Tabelle 1: Verhältnisse aufeinanderfolgender Fibonacci Zahlen

a_1	$=$	$1/1$	$=$	1	a_7	$=$	$21/13$	$\approx$	1,61538
a_2	$=$	$2/1$	$=$	2	a_8	$=$	$34/21$	$\approx$	1,61905
a_3	$=$	$3/2$	$=$	1,5	a_9	$=$	$55/34$	$\approx$	1,61765
a_4	$=$	$5/3$	$\approx$	1,66667	a_{10}	$=$	$89/55$	$\approx$	1,61818
a_5	$=$	$8/5$	$=$	1,6	a_{11}	$=$	$144/89$	$\approx$	1,61798
a_6	$=$	$13/8$	$=$	1,625	a_{12}	$=$	$233/144$	$\approx$	1,61806
									etc.

Es sieht so aus, als ob sich die Folge a_n einem Grenzwert in der Nähe von 1,618 annähert. Das ist tatsächlich so. Der Beweis der Existenz des Grenzwerts erfordert allerdings ein wenig Wissen über

Folgen. Wenn wir aber davon ausgehen, dass der Grenzwert

$$\Phi = \lim_{n \to \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)}$$

existiert, so lässt sich dieses Φ mit einfachen Methoden berechnen. Wir finden leicht heraus, dass Φ einer quadratischen Gleichung genügen muss: Verwenden wir nämlich $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$, so sehen wir, dass

$$\frac{F(n{+}1)}{F(n)} = \frac{F(n) + F(n{-}1)}{F(n)} = 1 + \frac{F(n{-}1)}{F(n)} = 1 + \frac{1}{\frac{F(n)}{F(n-1)}}.$$

Lassen wir nun n gegen Unendlich gehen, dann gehen sowohl $a_n = F(n{+}1)/F(n)$, als auch die Zahlen $a_{n-1} = F(n)/F(n{-}1)$ gegen die Zahl Φ. Daher gilt für Φ die Beziehung

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}. \tag{1}$$

Multiplizieren wir das auf beiden Seiten mit Φ, erhalten wir

$$\Phi^2 = \Phi + 1. \tag{2}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, eine davon ist negativ. Die von uns gesuchte Lösung entsteht aus dem Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci Zahlen, muss also positiv sein. Unsere Schulmathematik liefert

$$\Phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}. \tag{3}$$

Φ, das arithmetische Mittel zwischen den Zahlen 1 und $\sqrt{5}$, ist die Zahl des **Goldenen Schnitts** (manchmal auch als Goldenes Mittel bezeichnet).

Hier ist die Zahl Φ in Dezimalschreibweise mit den ersten 50 Nachkommastellen:

$$\begin{aligned}\Phi &= 1{,}61803398874989484820458683436563811772030917980576\ldots\\ &\text{und}\\ 1/\Phi &= 0{,}61803398874989484820458683436563811772030917980576\ldots\\ \Phi^2 &= 2{,}61803398874989484820458683436563811772030917980576\ldots\end{aligned}$$

Irgendwie ist es doch erstaunlich, dass Invertieren und Quadrieren von Φ nichts an den Kommastellen ändert. Für Φ ist das aber ganz selbstverständlich, denn genau das ist ja gerade der Inhalt der Gleichungen (1) und (2).

Ein Rechteck, dessen längere Seite genau um den Faktor Φ länger ist als die kürzere, nennt man ein **Goldenes Rechteck**. Die mit der Methode in Abb. 1 hergestellten Rechtecke sind offenbar Approximationen, die Schritt für Schritt einem Goldenen Rechteck immer ähnlicher werden. Es wird oft behauptet, dass ein Goldenes Rechteck besonders ästhetische Proportionen hat und daher – bewusst oder unbewusst – sehr oft als gestaltendes Prinzip in Kunst und Architektur eingesetzt wird. Allerdings lässt sich das Auftauchen der Zahl Φ in diesem Zusammenhang nur selten zweifelsfrei belegen. Einen guten Einblick in diese Problematik bietet das folgende Beispiel des oft behaupteten Auftretens der Goldenen Proportion in einem der architektonischen Meisterwerke der Antike - der Cheopspyramide.

3 Das Geheimnis der großen Pyramide

3.1 Die unvernünftige Genauigkeit der alten Ägypter

Voller Bewunderung steht der Besucher auf dem Gizeh Plateau bei Kairo vor der größten aller ägyptischen Pyramiden, dem Grabmal des Pharaos Chufu, des zweiten Königs der 4. Dynastie, der hierzulande besser unter seinem griechischen Namen Cheops bekannt ist. Chufu übte seine grausame Herrschaft über das Alte Reich in Ägypten etwa um 2600 v.Chr. aus — und man stellt unwillkürlich die Frage, wie ein Volk, das gerade erst der Steinzeit entwachsen war, derart gigantische Bauwerke mit unglaublicher Präzision in perfekter geometrischer Form errichten konnte.

Die Leistung der alten Ägypter erscheint unvorstellbar, und es ist wohl eine verbreitete menschliche Grundvorstellung, dass etwas, das man sich nicht gleich vorstellen kann, auch nicht mit rechten Dingen zugegangen sein kann. Daher meinten viele, die alten Ägypter hätten beim Pyramidenbau wohl überirdische Hilfe gehabt. Während man im 19. Jahrhundert noch Gott als aktiven Helfer vermutete, tauchten vor allem in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts Spekulationen auf, außeriridische Raumfahrer, oder zumindest die Bewohner der untergegangenen Insel Atlantis hätten die Völker der Antike wohlwollend unterstützt und ihr überlegenes, inzwischen verlorenes Wissen unter anderem in den Abmessungen der Cheopspyramide kodiert. So bizarr diese Thesen erscheinen mögen, sie wurden und werden noch immer in pseudowissenschaftlichen Kreisen heftig diskutiert [10]. Glücklicherweise gibt es auch kritische Publikationen zu diesem Thema, die Scheinargumente und Halbwahrheiten ins rechte Licht rücken, zum Beispiel das Buch von Frank Dörnenburg [11], das in lockerer und unterhaltsamer Manier mit so manchem angeblichen Mysterium aufräumt. Speziell mit den Abmessungen der Pyramide befasst sich ein Artikel von Ulrich Eckhardt [12], der auch auf mögliche Methoden eingeht, mit denen die Ägypter die Präzision in der Bauausführung erreicht haben könnten.

Die Frage, ob die große Pyramide in ihren Abmessungen ein heimliches mathematisches Wissen kodiert, das die alten Ägypter unmöglich gehabt haben konnten und das daher als ein Hinweis auf eine über- oder außerirdische Intervention gewertet werden könnte, hat eine Heerschaar von Pyramidologen und Zahlenmystikern seit alters her beschäftigt. Sie widmeten sich der Erforschung angeblicher mathematischer Beziehungen in den Maßzahlen und Proportionen der Cheopspyramide.

Dabei ist die Bestimmung der genauen Abmessungen der großen Pyramide ein nicht ganz einfaches archäologisches Problem, denn Steinraub und natürliche Erosion haben das Bauwerk stark beschädigt. Die am besten bekannten Maße der großen Pyramide sind die Seitenlängen des Basisquadrats. An der Basis der Pyramide befinden sich noch einige der originalen Verkleidungssteine in der ursprünglichen Position. Insbesondere die Ecksteine wurden sehr präzise positioniert und können heute millimetergenau vermessen werden. Demnach beträgt die mittlere Seitenlänge des Basisquadrats $s = 230{,}36\,\mathrm{m}$ mit einer maximalen Abweichung von 3,2 cm. Das ist eine wirklich beachtliche Präzision, wenn man bedenkt, dass die Ägypter lediglich genau gearbeitete Messlatten und Setzwaagen zur Verfügung hatten – und natürlich äußerste Sorgfalt im Umgang mit diesen Instrumenten walten ließen. Es wird übrigens vermutet, dass die Seitenlänge genau 440 ägyptische Königsellen betragen soll. Daraus berechnet man die Länge einer solchen Elle zu 0,5235 Meter, was mit sonstigen Quellenangaben gut übereinstimmt.

Viel schwieriger als die Seitenlänge ist die Höhe zu bestimmen. Die Spitze der Pyramide und die ursprüngliche glatte Verkleidung existiert nicht mehr. Heute ist die Cheopspyramide noch 138,75 m hoch, ursprünglich war sie um fast 8 m höher. Ein recht plausibler Schätzwert für die ursprüngliche Höhe ist $h = 146{,}5\,\mathrm{m}$. Die daraus berechnete Steigung der Böschung (der sogenannte Böschungswinkel) beträgt $51°49{,}5'$, was den gemessenen Werten entspricht (wobei man für eine solche Messung durchaus Ungenauigkeiten von einigen Bogenminuten erwarten darf).

Die Pyramidologen des 19. Jahrhunderts, allen voran der schottische Astronom Piazzi Smyth, haben die Maße der Pyramide auf vielfältige Arten kombiniert und alle möglichen Verhältnisse gebildet, um auf versteckte Zahlengeheimnisse zu stoßen. Folgen wir diesen Spuren und berechnen wir einmal die Höhe des Seitendreiecks, die Länge d in der Abbildung 4. Wir verwenden dazu den Satz von Pythagoras, den wir auf das in dieser Abbildung eingezeichnete rechtwinklige Hilfsdreieck anwenden:

$$d = \sqrt{h^2 + (s/2)^2} = 186{,}356 \text{ m}.$$

Berechnet man nun das Verhältnis von diesem d zur halben Länge des Basisquadrats $s/2$, erhält man

$$d : \frac{s}{2} = \frac{186{,}356}{115{,}18} = 1{,}61795$$

und diese Zahl liegt verdächtig nahe beim Goldenen Schnitt $\Phi \approx 1{,}61803$. Könnten es sein, dass die alten Ägypter tatsächlich dieses Verhältnis in die Pyramide eingebaut haben?

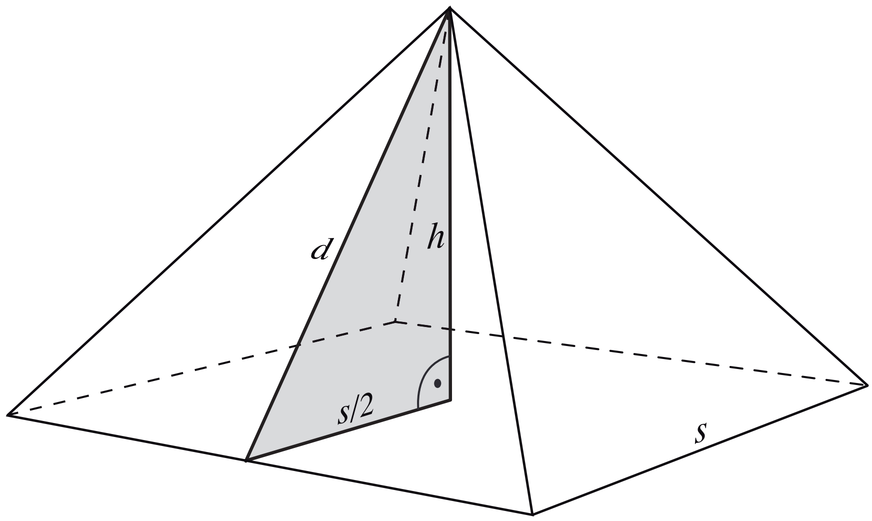

Abbildung 4: Ein Dreieck in der Pyramide.

Wir können noch schnell berechnen, wie hoch die Pyramide sein müsste, damit das obige Verhältnis exakt gleich Φ wird. Es ergibt sich $h = 146{,}511$ – ein Wert, der nur 11 Millimeter neben der ursprünglichen Schätzung liegt. Es ist klar, dass bei einem realen Bau solch geringe Unterschiede keine Rolle spielen können. Zum einen kann niemand so genau bauen und zum anderen sind die Messungenauigkeiten aufgrund des heutigen Zustandes der Pyramide wesentlich größer. Wir können also getrost feststellen:

Die realen Abmessungen der Cheopspyramide stehen im Einklang mit folgender Hypothese:

Φ-Hypothese:

Die Cheopspyramide ist so konstruiert, dass die Höhe d eines Seitendreiecks zur halben Basis-Seitenlänge $s/2$ im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht.

Aber war es auch wirklich so geplant oder ist das alles nur ein Zufall? Man kann nämlich mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass den alten Ägyptern das Konzept vom Goldenen Schnitt gänzlich unbekannt war. Warum sollten sie also dieses Zahlenverhältnis in die Pyramide einbauen?

3.2 Die Berufung auf Herodot

Eine sehr weit verbreitete und immer wieder zitierte Erklärung stammt offenbar vom amerikanischen Pyramidologen John Taylor (1781–1864) [13], der seinerseits als Quelle den griechischen Geschichtsschreiber Herodot (ungef. 484 – 434 v.Chr.) anführt. Die Ägypter hätten gar nicht die Absicht gehabt, den Goldenen Schnitt in die Pyramide einzubauen. Statt dessen wären Sie folgendem Konstruktionsprinzip gefolgt:

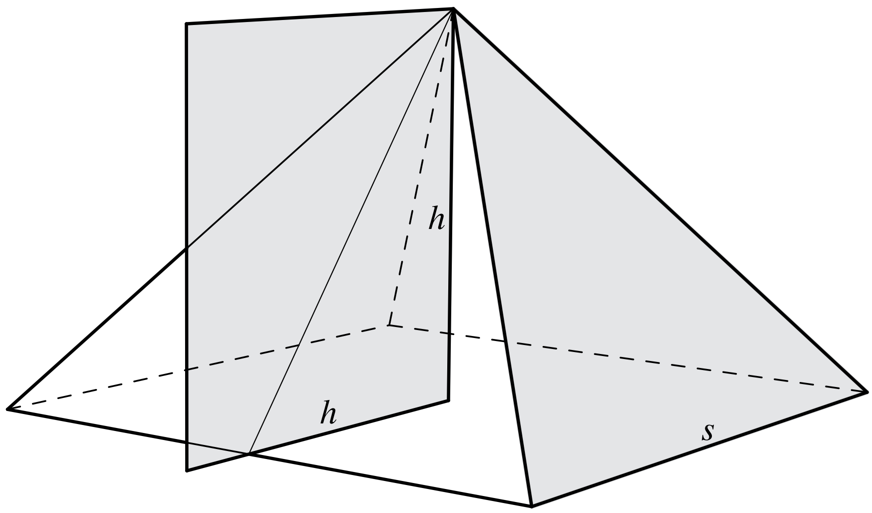

Abbildung 5: Eine Herodot zugeschriebene Charakterisierung der Cheopspyramide: Jede der dreieckigen Seitenflächen hat den gleichen Flächeninhalt wie das mit der Höhe gebildete Quadrat.

> **Herodot-Hypothese**:
> Die Cheopspyramide ist so konstruiert, dass jede der Seitenflächen gleich groß ist wie das Quadrat über der Höhe der Pyramide (siehe Abbildung 5).

Frage 4 *Was bedeutet die Herodot-Hypothese für die Proportionen der Pyramide? Betrachte dazu das in der Abbildung 4 eingezeichnete Dreieck und berechne das Verhältnis von d zu $s/2$.*

Die Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks in Abbildung 4 stehen über den Satz von Pythagoras miteinander in Beziehung:

$$(s/2)^2 + h^2 = d^2.$$

Die Fläche des Seitendreiecks ist die halbe Grundlinie $s/2$ mal der Höhe d. Nach unserer Charakterisierung soll diese Fläche gleich h^2 sein, der Fläche eines aus der Höhe h gebildeten Quadrats, also

$$h^2 = \frac{s \cdot d}{2}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck für h^2 in die Formel oben ein, erhalten wir

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s}{2}\,d = d^2.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $(s/2)^2$, wird daraus

$$1 + \frac{d}{s/2} = \left(\frac{d}{s/2}\right)^2.$$

Bezeichnen wir das Verhältnis von d zu $s/2$ mit x, so gilt für x also die Beziehung

$$1 + x = x^2.$$

Diese quadratische Gleichung hat, wie wir wissen, zwei Lösungen, von denen nur $x = \Phi$ eine positive Größe ist, also hier als Lösung in Betracht kommt. Eine einfache Anwendung des Satzes von Pythagoras hat uns also folgendes Ergebnis beschert:

> In einer quadratischen Pyramide, bei der die Seitenfläche gleich dem Quadrat der Höhe der Pyramide ist, steht die Höhe des Seitendreiecks zur halben Basisseitenlänge im Verhältnis des Goldenen Schnitts:
> $$\frac{d}{s/2} = \Phi.$$

Ein rechtwinkliges Dreieck, bei der die Hypotenuse zur kürzeren Kathete im Verhältnis Φ steht, nennt man ein Goldenes rechtwinkliges Dreieck, oder Kepler-Dreieck nach Johannes Kepler (1571–1630), der es genau beschrieben hat. Es hat die in Abbildung 6 gezeigte Form.

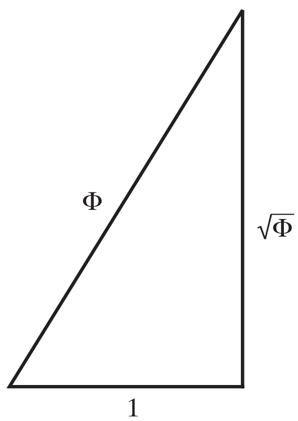

Abbildung 6: Kepler-Dreieck

Ein jedes Dreieck, für das die Seitenlängen a, b, c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen, ist nach dem Satz von Pythagoras ein rechtwinkliges Dreieck. Insbesondere gilt das natürlich für das Dreieck mit den Seitenlängen $a = 1$, $b = \sqrt{\Phi}$ und $c = \Phi^2$, denn die pythagoräische Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ ist dabei identisch mit der die Zahl Φ definierenden quadratischen Gleichung

$$1 + \Phi = \Phi^2.$$

Die Seitenlängen eines Kepler-Dreiecks bilden also eine sogenannte geometrische Progression: Sie ergeben sich aus der kürzesten Seite durch wiederholte Multiplikation mit demselben Faktor, nämlich $\sqrt{\Phi}$. Also: Seitenlänge a mal $\sqrt{\Phi}$ ergibt die Seitenlänge b. Und b multipliziert mit $\sqrt{\Phi}$ ergibt die Seitenlänge c.

Die Herodot-Hypothese ist also gleichbedeutend mit der Φ-Hypothese. Für die Cheopspyramide ist demnach das in Abbildung 4 gezeigte Dreieck ein Kepler-Dreieck. Damit enthält die Cheopspyramide automatisch die Proportion Φ.

So überzeugend diese Zahlen und mathematische Fakten klingen mögen, sie müssen doch hinterfragt werden. Tatsächlich ist die von Taylor angeführte Quelle, der griechische Geschichtsschreiber Herodot, keineswegs geeignet, diese Behauptung zu belegen, worauf der Mathematiker Roger Herz-Fischler bereits 1979 hingewiesen hat, siehe [14]. Und tatsächlich kann man sich leicht davon überzeugen, dass die einzige Stelle bei Herodot, die sich auf die Abmessungen der Pyramide bezieht, die folgende ist ([15], Paragraph 124, Seite 196):

„*Aber zwanzig Jahr wurde gearbeitet an der Pyramide selbst, deren jegliche Seite ist acht Plethra breit und ist vierseitig, und die Höhe ebenso viel, und ist von geglättetem Stein, sehr gut in einander gefügt, und kein Stein ist kleiner als dreißig Fuß.*“

Dabei ist ein Plethron (= 100 griechische Fuß) ein Längenmaß, dessen exakte Länge nicht mehr bekannt ist, aber etwa im Bereich 29,4 bis 32,8 Meter liegen dürfte. Und natürlich ist die Höhenangabe Herodots, der sich wohl nicht auf moderne Vermessungsmethoden stützte, sondern auf seinen optischen Eindruck, ganz falsch. Auf den ersten Blick ist hier jedenfalls nichts von der Herodot-Hypothese erkennbar. Taylor scheint nun eine sehr gewagte Uminterpretation dieser Stelle vorgenommen zu haben. Es sei, so Taylor, hier nämlich die durch den Satzteil „und die Höhe ebensoviel“ ausgedrückte Gleichheit als „quadratische Gleichheit“ zu verstehen. Herodot habe die Stelle eben so gemeint, dass nicht die Seitenlänge ebensoviel wie die Höhe, sondern die Seiten*fläche* ebensoviel wie das *Quadrat* der Höhe sei. Vom heutigen Standpunkt erscheint diese Interpretation jedoch fragwürdig. Der Taylor-Hypothese fehlt jegliche wissenschaftliche Grundlage.

3.3 Die Hypothese von der Pi-ramide

Wir sehen uns also nach eventuellen anderen Erklärungen um. Eine Möglichkeit ergibt sich aus einem anderen verblüffenden Zahlenverhältnis, das wir in der Cheopspyramide finden. Siehe dazu auch [12].

Mit der Höhe $h = 146,5$ m und der Seitenlänge $s = 230,36$ m ergibt sich für das Verhältnis von halbem Umfang des Basisquadrats zur Höhe folgender Zahlenwert:

$$2s : h = 3{,}14485.$$

Dieser Zahlenwert liegt verdächtig nahe an der Zahl $\pi = 3{,}14159\ldots$. Wieder können wir es ohne Weiteres unseren Schülern überlassen, auszurechnen, dass man die ursprünglich angenommene Höhe nur um ca. 15 cm korrigieren müsste, damit die Beziehung $2s = \pi h$ exakt gilt: Dazu müsste die Cheopspyramide tatsächlich die Höhe $146,652$ m gehabt haben. Diese Ungenauigkeit von 15 cm ist noch immer weitaus genauer, als die Unsicherheiten in der Feststellung der ursprünglichen Höhe. Wir können also wieder festhalten, dass die Abmessungen der großen Pyramide im Einklang mit folgender Behauptung sind, die offenbar ebenfalls auf John Taylor zurückgeht.

π-Hypothese:
Die Cheopspyramide ist so konstruiert, dass der Umfang des Basisquadrats gleich dem Umfang eines Kreises ist, dessen Radius die Höhe h ist:

$$4s = 2h\pi.$$

Auch hier haben wir das Problem, dass die Zahl π den Ägyptern unmöglich bekannt gewesen sein konnte. Wir wissen ziemlich genau über die altägyptischen Methoden zur Kreisberechnung Bescheid.

Das Papyrus Rhind (um 1650 v. Chr.) enthält eine Sammlung von Aufgaben zu verschiedenen mathematischen Themen, die in der damaligen Zeit von Bedeutung waren, darunter auch die näherungsweise Berechnung der Fläche eines Kreises über Hilfsquadrate. Bei dieser Methode wird anstelle von π effektiv einen Wert um 3,16 verwendet, welcher viel ungenauer ist als die in der Pyramide gefundene Zahl. Auch war der Gedanke, dass die Kreisfläche direkt proportional zum Quadrat des Radius ist, den Ägyptern fremd, daher hatten sie auch keinen Namen für diesen Proportionalitätsfaktor. Das Konzept von π war also den alten Ägyptern völlig unbekannt und daher ist es nicht gut möglich, dass sie bewusst die Zahl π zur Konstruktion der Pyramide verwendeten. Wie konnten Sie also die Zahl π mit solch „unvernünftiger Genauigkeit“ in den Abmessungen der Pyramide realisieren?

Eine sehr einleuchtende Erklärung beschreibt Kurt Mendelssohn in seinem Buch [16] unter Berufung auf einen Elektronikingenieur namens T.E. Connolly. Diese Erklärung beruht auf der Annahme, dass die alten Ägypter horizontale Längen und Entfernungen durch das Abrollen eines Messrades oder einer Messrolle gemessen hätten, während sie senkrechte Längen, also Höhen gemessen hätten, indem sie den Durchmesser dieser Rolle als Maßstab verwendeten. Wenn also die Seitenlänge einer bestimmten Anzahl von Umdrehungen einer Messrolle und die Höhe einer bestimmten Anzahl von Durchmessern der Messrolle entspricht, dann würde π automatisch in den Proportionen der Pyramide erscheinen.

Frage 5 *Angenommen, die Seitenlänge s der Pyramide kommt durch n Umdrehungen der Messrolle zustande. Wie viele Durchmesser braucht man für die Höhe, damit die so konstruierte Pyramide die Proportion $2s : h = \pi$ hat?*

Die Antwort wird in der Abbildung 7 gegeben.

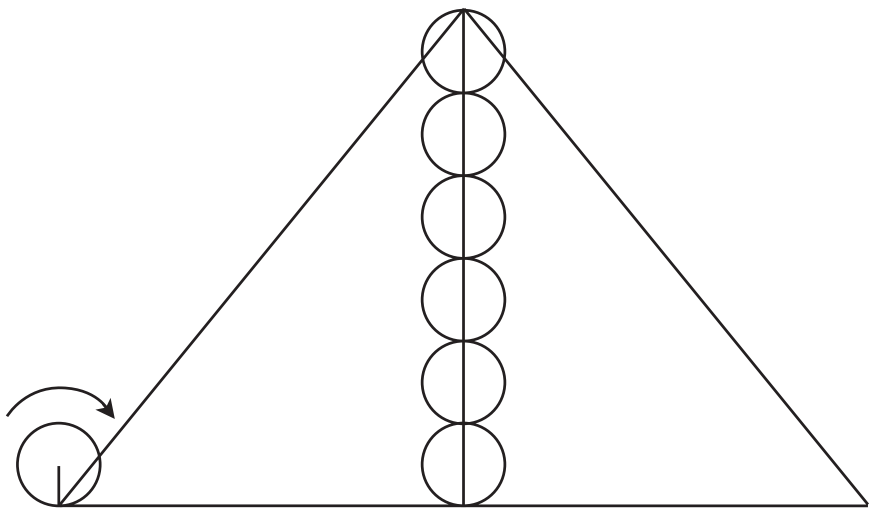

Abbildung 7: Umfang und Durchmesser einer Rolle als Pyramidenmaß. n Umdrehungen der Rolle für die Pyramidenseite und $2n$ Durchmesser für die Höhe ergeben eine Pyramide mit der Proportion $2s : h = \pi$.

Das Auftreten der Zahl des Goldenen Schnitts erklärt sich nun aus der annähernden Übereinstimmung der Zahlenwerte von $2/\sqrt{\Phi}$ und $\pi/2$:

$$\frac{2}{\sqrt{\Phi}} \approx 1{,}5723 \quad \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$$

Jede Pyramide, die Φ in ihren Proportionen hat, hat in sehr guter Näherung auch π in ihren Proportionen.

Die vorgestellte Interpretation ist einfach und erklärt das Zustandekommen der Zahlenverhältnisse ohne die Annahme, dass die Ägypter über ein „höheres Wissen“ verfügt hätten. Der gravierende Nachteil dieser Erklärung ist aber, dass es für die vermutete Methode keinerlei historische Belege gibt. Offenbar taucht in keinem Bericht und in keiner Abbildung ein Hinweis auf, dass die Ägypter Rollen oder Räder verwendet haben könnten, um Längen zu messen. Es handelt sich also hier um eine Annahme, die einzig und allein dazu dient, das Auftreten eines bestimmten Zahlenverhältnis in der Cheopspyramide zu erklären, und die keinerlei sonstige Rechtfertigung hat. Auf keinen Fall war es eine allgemein in Ägypten angewandte Methode, denn schon die Nachbarpyramiden am Plateau von Gizeh enthalten π nicht in ihren Proportionen.

3.4 Eine einfache Erklärung

Eine einfache Erklärung ergibt sich wieder aus dem Papyrus Rhind, in dem sich auch Beispiele finden lassen, die mit dem Böschungswinkel der Pyramide zu tun haben. In diesem Zusammenhang taucht der Begriff „Seked“ auf. Das Seked ist ein Maß für die Steigung der Seitenfläche einer Pyramide. Als Längeneinheit diente den Ägyptern die Königselle, die sich ihrerseits aus 28 Fingern zusammensetzt. Das Seked einer Pyramide gibt an, wieviele Finger horizontale Entfernung für einen Anstieg um eine Königselle nötig ist. Ein Seked von 22 besagt also, dass auf 22 Finger horizontale Distanz die Höhe um 28 Finger zunimmt. Die bei uns übliche Angabe der Steigung erhalten wir, wenn wir 28 durch die Seked-Zahl dividieren:

$$\frac{28}{\text{Seked}} = \text{Böschungssteigung } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Frage 6 *(Beispiel 57 des Papyrus Rhind, 1650 v. Chr.) Eine Pyramide hat eine Seitenlänge von 140 Königsellen und ein Seked von 21. Was ist ihre Höhe?*

Die Antwort ist eine einfache Schlussrechnung: 28 verhält sich zu 21 wie h zu s/2=70, oder $h = 93\frac{1}{3}$.

Vieles spricht dafür, dass die ägyptischen Pyramiden jeweils mit einem bestimmten Seked erbaut wurden. Um eine gute optische Wirkung zu erzielen, strebten die Ägypter ein möglichst kleines Seked an, also hohe Böschungssteigungen. Eine zu steile Böschung barg allerdings die Gefahr, dass das Bauwerk aufgrund des Innendrucks instabil wurde und barst. Es ist anzunehmen, dass ein Seked von 22 das zur Zeit von Cheops technisch realisierbare Maximum darstellt.

Demnach können wir von der einfachen Annahme ausgehen, dass die Cheopspyramide mit einem Seked von 22 geplant war und auch so errichtet wurde. Wenn die Seitenlänge also 440 Königsellen betragen sollte, musste die Höhe genau 280 Königsellen betragen.

Die Böschungssteigung beträgt dann

$$\frac{280}{220} = \frac{28}{22} = 4 \cdot \frac{7}{22} \approx \frac{4}{\pi}$$

Dabei haben wir die bekannte rationale Approximation für die Zahl π

$$\frac{22}{7} \approx 3,1429 \approx \pi$$

verwendet.

22-Seked-Hypothese:

Die Cheopspyramide ist mit einem Seked von 22 konstruiert. Ihre Böschungssteigung beträgt also $\frac{28}{22}$, was einem ungefähren Böschungswinkel von $51°51'$ entspricht.

Nach dieser Hypothese kommt π in der Pyramide einfach deshalb vor, weil bei einem Seked von 22 die Steigung (also das Verhältnis von h zu $s/2$) auf einfache Weise mit der Zahl $22/7$ zusammenhängt, und weil diese Zahl eine gute rationale Approximation an die Zahl π darstellt.

Die bei einem Seked von 22 resultierende Höhe der Pyramide aus der gegebenen Seitenlänge von $s = 230{,}36$ m zu bestimmen, ist nun eine einfache (Schul-)Aufgabe. Die Höhe beträgt demnach 146,59 m, was nur um 9 cm vom ursprünglichen Schätzwert abweicht. Dieser Wert liegt genau zwischen den Werten, die die anderen hier diskutieren Hypothesen ergeben haben.

Die 22-Seked Hypothese wird heute wohl von den meisten Historikern und Archäologen favorisiert. Auch viele andere Pyramiden in Ägypten haben ein (ganzzahliges) Seked. Die Pyramiden späterer Zeit tendieren dazu, ein kleineres Seked zu haben (also größere Steigung), aber alle Pyramiden haben ein Seked zwischen 28 und 20.

Das geheimnisvolle Auftreten von erstaunlichen Proportionen in der Pyramide entpuppt sich also als ein reiner Zufall.

Um Schülern eine Vorstellung der praktischen Unterschiede der drei vorgestellten Hypothesen zu geben, kann man sie (möglichst groß) das rechtwinklige Dreieck aus Abbildung 4 zeichnen lassen, das der jeweiligen Hypothese entspricht. Bei der Φ-Hypothese ergibt sich die längere Kathete aus der kürzeren durch Multiplikation mit dem Faktor $\sqrt{\Phi} \approx 1{,}27202$, bei der π-Hypothese muss man mit $4/\pi \approx 1{,}27324$ mulitiplizieren, und bei der Seked-Hypothese mit $28/22 \approx 1{,}27273$. Man könnte dazu zum Beispiel ein DIN A4 Blatt verwenden, wobei man die kürzere Seite (210 mm) als kürzere Kathetenseite nimmt. Auf der längeren Kante des DIN-A4 Blattes kann man dann versuchen, die längere Kathetenseite abzutragen: 267,12 mm (Φ-Hypothese), 267,38 mm (π-Hypothese) und 267,27 mm für die 22-Seked Hypothese. Aus diesen Zahlen sieht man, dass der Versuch nicht klappen wird, denn ein zehntel Millimeter Unterschied geht normalerweise in der Dicke eines Bleistiftstriches verloren. Wenn man die Unterschiede zeichnerisch darstellen möchte, müsste man also einen wesentlich größeren Maßstab wählen.

Frage 7 *Zeichne einen Querschnitt der Pyramide auf ein DIN A0 Blatt (es hat die Fläche von einem Quadratmeter und das Seitenverhältnis* $1 : \sqrt{2}$*). Wie deutlich kann man die Unterschiede zwischen den drei Hypothesen darstellen?*

Literatur

[1] George Markowsky, *Misconceptions about the golden ratio*. The College Mathematics Journal, **23**(1), 2–19 (1992).

[2] Bernd Thaller, *Leonardo und der Goldene Schnitt*, Skriptum zum Tag der Mathematik, Graz (2009). http://mug.didaktik-graz.at/Files/fibonacci.pdf (Zugriff: 12.9.2011)

[3] http://mug.didaktik-graz.at/RFDZ/Fibonacci.html (Zugriff: 29.10.2011)

[4] Mark Wahl, *A Mathematical Mystery Tour - Higher-Thinking Math Tasks*, Zephyr Press, Tucson (1988). ISBN-13: 978-0913705261

[5] Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri, *Der Goldene Schnitt*, Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage 1998. ISBN: 978-3860254042

[6] Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, *The Fabulous Fibonacci Numbers*, Prometheus Books (2007). ISBN: 978-1591024750

[7] Mario Livio, *The Golden Ratio: The Story of PHI, the World's Most Astonishing Number*, Broadway (2003). ISBN: 978-0767908160

[8] Hans Magnus Enzensberger, *Der Zahlenteufel - Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben*. Deutscher Taschenbuchverlag, Reihe Hanser, 9. Auflage (2008). ISBN: 978-3423620154

[9] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html (Zugriff: 29.10.2011)

[10] Erich von Däniken, *Die Augen der Sphinx*, Goldmann-Verlag (1991). ISBN 978-3442123391

[11] Frank Dörnenburg, *Pyramidengeheimnisse? Enträtselte Mysterien*, Verlag Patrick Brose, 2. Auflage (2009). ISBN: 978-3981200034

[12] Ulrich Eckhardt, *π, die Bibel und die Cheopspyramide*, Vortragsskriptum, Universität Hamburg (2006). www.aww.uni-hamburg.de/eckhardt2.pdf (Zugriff 29.10.2011)

[13] John Taylor, *The great pyramid, why was it built and who built it?*, Longman, Green, Longman, and Roberts, London (1859).

[14] Roger Herz-Fischler, *The Shape of the Great Pyramid*, Wilfrid Laurier University Press, Waterloo, (2000). ISBN: 978-0889203242

[15] Die Geschichten des Herodotos übersetzt von Friedrich Lange, Erster Teil. Zweites Buch. Euterpe. Verlag Josef Max und Comp., Breslau (1824).

[16] Kurt Mendelssohn, *Das Rätsel der Pyramiden*, Weltbild Verlag, Augsburg (1996). ISBN 978-3893501298